

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”***Ediția a XXVIII-a***ETAPA JUDEȚEANĂ – 7 martie 2026****XII. osztály –H1 – Szakközép kategória****1. feladat (20 pont)**

Értelmezzük a \mathbb{Z} halmazon az $x * y = xy - 2x - 2y + 6$ műveletet, bármely $x, y \in \mathbb{Z}$ esetén.

- Bizonyítsd be, hogy a „ $*$ ” művelet asszociatív és kommutatív!
- Határozd meg a \mathbb{Z} halmazban a „ $*$ ” műveletre nézve szimmetrizálható elemeket!
- Bizonyítsd be, hogy ha m, n és p olyan természetes számok, amelyekre $m * n * p = 13$ és $m \leq n \leq p$, akkor az m, n és p számok szorzata osztható 13-mal!

2. feladat (20 pont)

Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_3 x$ függvény.

- Határozd meg a $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{3^{f(x)}}{x} - x$ függvénynek azt a $G: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ primitív függvényét, amelyre $G(2) = 2026$.

- Igazold, hogy $I = \int_1^e x f(x) dx = \frac{e^2 + 1}{4 \ln 3}$.

- Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén értelmezzük: $I_n = \int_1^e x f^n(x) dx$.

Igazold, hogy $I_n = \frac{e^2}{2(\ln 3)^n} - \frac{n}{2 \ln 3} I_{n-1}$, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén!

3. feladat (20 pont)

Adottak az $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixok, ahol $A = \begin{pmatrix} 2026 & 1 \\ 2025 & 1 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} -2026 & 2025 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Tekintsük a $G = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det(X) = 1\}$ halmazt.

- Ellenőrizd, hogy az A és B eleme-e a G halmaznak!
- Igazold, hogy a G halmaz a mátrixok szorzásával csoportot alkot!
- Bizonyítsd be, hogy ha $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ az $X^2 - X + I_2 = O_2$ egyenlet egy megoldása, akkor $a + d = 1$.

4. feladat (30 pont)

Egy kísérlet során megfigyelték, hogy egy forrás által kibocsátott sugárzás intenzitása, amelyet a forrástól

$a > 0$ távolságra lévő pontban mértek, a következő képlettel adható meg: $I(a) = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + a^2} dx$.

- Számítsd ki a sugárzás intenzitásának értékét a forrástól $a = 1$, illetve $a = \sqrt{3}$ távolságra lévő pontokban!

- Bizonyítsd be, hogy az $I: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, I(a) = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + a^2} dx$ függvény csökkenő; értelmezd fizikai szempontból a kapott eredményt!

- Igazold, hogy fennáll az $I(a) > \frac{1}{a^2 + 1}$ egyenlőtlenség bármely $a > 0$ esetén!

Megjegyzés:

Munkaidő: 3 óra; minden feladat kötelező; hivatalból 10 pont jár.

A maximális pontszám 100 pont.